Klasse 7 Algebra

1. Zuordnungen

Bei einer Zuordnung wird jeder Zahl (aus einer Menge von Zahlen) eine weitere Zahl zugeordnet.

Beschreibungsmöglichkeiten: Tabelle, Graph, Zuordnungsvorschrift

1.1 Proportionale Zuordnungen

Bei proportionalen Zuordnungen wird dem doppelten, dreifachen,...Wert der einen Größe, das doppelte, dreifache,... der anderen Größe zugeordnet.

Bsp.: Liter Benzin $\mapsto$ Preis in €

Beispiel-Dreisatz:

Bsp.: 7 l $\mapsto$ 7,84 €

1 l $\mapsto$ 7,84 € : 7 = 1,12 €

20 l $\mapsto$ 22,40 €

Zuordnungsvorschrift: $x \mapsto m \cdot x$,

m heißt **Proportionalitätsfaktor.**

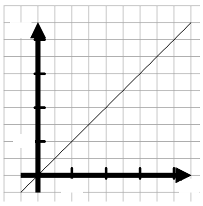
Graph: Eine vom Nullpunkt ausgehende Halbgerade.

A(1|m) ist immer ein Punkt des Graphen.

Besondere Eigenschaft:

Quotientengleichheit

„Unterer“ Wert geteilt durch „oberen“ Wert in der Wertetabelle ergibt gemeinsamen Quotientenwert y:x = Proportionalitätsfaktor (m).



1.2 Umgekehrte Proportionalität

Bei einer umgekehrt proportionalen Zuordnung wird dem doppelten, dreifachen, ... Wert der einen Größe die Hälfte, der dritte Teil,... der anderen Größe zugeordnet.

Bsp.: Anzahl der Arbeiter $\rightarrow$ Arbeitszeit

Beispiel-Dreisatz:

Bsp.: 7 A. $\mapsto$ 40 h

1 A. $\mapsto$ 7·40 h = 280 h

5 A. $\mapsto$ 280 h : 5 = 56 h

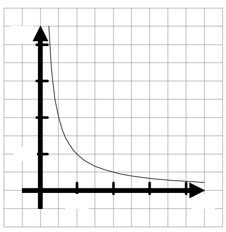
Zuordnungsvorschrift:

$x \mapsto \frac{a}{x}$, a fest

Graph: Hyperbel

Besondere Eigenschaft:

Produktgleichheit. Gemeinsamer Produktwert x·y = a.



2. Prozentrechnung

Prozent = Hundertstel

Bsp.: $5\% = \begin{cases} \frac{5}{100} = \frac{1}{20} \\ 0{,}05 \end{cases}$ $\quad 25\% = \begin{cases} \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \\ 0{,}25 \end{cases}$

2.1 Prozentsatz, Grundwert, Prozentwert

Anteile werden häufig in Prozent angegeben.

$p\% = \frac{p}{100}$ Es gilt: p% von G = W

p% = **Prozentsatz**, G = **Grundwert,** W = **Prozentwert.** Dem Grundwert werden immer 100% zugeordnet.

2.2 Beispiele

<table>
<tr><td>Eine Ware kostet 50,00 € und wird um 16% verteuert.
100% $\mapsto$ 50,00 €
1% $\mapsto$ 50,00€ : 100 = 0,5 €
116% $\mapsto$ 0,5 € · 116 = 58,00 €</td><td>Eine Ware kostet 58,00 € und wird um 16% verbilligt.
100% $\mapsto$ 58,00 €
1% $\mapsto$ 58,00€ : 100 = 0,58 €
84% $\mapsto$ 0,58 € · 84 = 48,72 €</td></tr>
<tr><td colspan="2">Eine Ware wir von 50 € auf 58 € verteuert.
50 € $\mapsto$ 100%
1 € $\mapsto$ 100% : 50 = 2%
8 € $\mapsto$ 2% · 8 = 16%</td></tr>
</table>

2.3 Zinsrechnung

Zins Z = Leihgebühr in €

Kapital K = ausgeliehener Geldbetrag

Zinssatz p% = Leihgebühr in %

Zinsformel: $Z = \frac{t}{360} \cdot \frac{p}{100} \cdot K$

1 Zinsjahr = 360 Tage, 1 Zinsmonat = 30 Tage

3. Rationale Zahlen

3.1 Negative Zahlen

Durch die Erweiterung des Zahlen*strahls* zur Zahlen*geraden* kommen die **negativen Zahlen** hinzu.

$-5{,}27\,;\ -4\,;\ -\frac{4}{7}$.

–a heißt **Gegenzahl** von a. *Die Gegenzahl erhält man aus a durch Multiplikation mit –1.*

Beispiel: $4 \cdot (-1) = -4$

Die positiven und die negativen (Bruch-)Zahlen bilden mit der Zahl 0 die **Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen**.

Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

$\mathbb{Z}^+$ *umfasst z.B. alle positiven ganzen Zahlen,* $\mathbb{Q}_0^-$ *steht für alle negativen rationalen Zahlen einschließlich der 0.*

3.2 Betrag einer rationalen Zahl

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

$|-5| = -(-5) = 5, \quad |7| = 7, \quad |0| = 0$

3.3 Addition und Subtraktion rationaler Zahlen

Bei gleichem Vorzeichen werden die Beträge addiert. Die Summe erhält das gemeinsame Vorzeichen.

Bsp.: $5 + (+8) = 13$
$(-5) + (-8) = -13$

Bei verschiedenem Vorzeichen wird vom größeren Betrag der kleinere Betrag subtrahiert. Die Differenz erhält das Vorzeichen der Zahl mit dem größeren Betrag.

Bsp.: $5 + (-8) = -3$
$(-5) + (+8) = 3$

Subtrahieren einer Zahl bedeutet Addieren ihrer Gegenzahl.

a-(+b) = a+(-b) **a-(-b) = a+(+b)**

Steht ein Pluszeichen vor einer Klammer, so darf man die Klammer weglassen.

Bsp.: $5+(8{,}5-2+3{,}1-3) = 5+8{,}5-2+3{,}1-3$

Wenn man eine Minusklammer auflösen will, so muss man alle Vorzeichen in der Klammer ändern.

Bsp.: $9-(8{,}5-2+3{,}1-3) = 9-8{,}5+2-3{,}1+3$

3.4 Multiplikation und Division rationaler Zahlen

Bei gleichen Vorzeichen multiplizieren (dividieren) wir die Beträge und geben dem Produkt (Quotient) ein positives Vorzeichen.

$(-3{,}5):(-2) = 1{,}75 \qquad (-2{,}25)\cdot(-4) = 9$

Bei verschiedenen Vorzeichen multiplizieren (dividieren) wir die Beträge und geben dem Produkt (Quotient) ein negatives Vorzeichen.

$(-8):(+2) = -4 \qquad (+3{,}2)\cdot(-5) = -16$

Für alle $x \neq 0$ gilt: $\mathbf{0 : x = 0}$

$\mathbf{x : 0}$ ist nicht definiert, durch 0 kann man nicht dividieren.

4. Terme

Treten in einem Term (Rechenausdruck) verschiedene Variablen auf, dann dürfen diese mit verschiedenen oder mit gleichen Zahlen belegt werden. Tritt aber dieselbe Variable mehrmals in einem Term auf, so muss sie jeweils mit derselben Zahl belegt werden.

Erst wenn man die Variablen in einem Term mit Zahlen belegt, erhält man den *Wert* des Terms.

$T(x) = x^2 - 3x \qquad T(2) = 2^2 - 3\cdot 2 = 10$

Zwei Terme $T_1(x)$ und $T_2(x)$, die bei allen Belegungen der Variablen x mit Zahlen aus der Grundmenge G jeweils den gleichen Wert annehmen, heißen **äquivalent** (gleichwertig).

Es gilt: $T_1(x) = T_2(x)$.

$T_1(a) = 2a + 2(a-2) = 4(a-1) = T_2(a)$

Umformungen, die nach den gültigen Rechengesetzen (KG, AG, DG, Klammerregeln [„*Klammern zuerst, Potenzen vor Punkt vor Strich!*]") erlaubt sind, führen einen Term in einen äquivalenten Term über. Solche Umformungen heißen **Äquivalenzumformungen**. (siehe zu den Rechengesetzen auch *Klasse 5 Algebra*)

$\frac{t^2}{2} - 1 + \frac{1}{2}t^2 = t^2 - 1$

$a+b^2 - (3a + 5b^2) = a+b^2 - 3a - 5b^2 = -2a - 4b^2$

Bei einer Summe von Produkten werden zunächst die einzelnen Produkte vereinfacht. Dann werden die Summanden, in denen die gleichen Variablen mit jeweils derselben Potenz vorkommen, zusammengefasst.

$3x^2 + 7y^3 - (5x)^2 - 4y^2$
$= 3x^2 + 7y^3 - 25x^2 - 4y^2$
$= -22x^2 + 7y^3 - 4y^2$