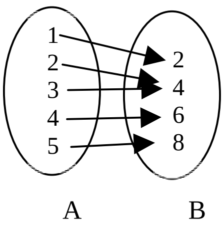
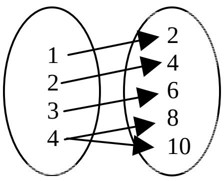
Klasse 8 Algebra

1. Funktionen

Ist jedem Element einer Menge A genau ein E-lement einer Menge B zugeordnet, so nennt man die Zuordnung **eindeutig**.



Dies ist eine eindeutige Zuordnung, denn jedem Element aus A wird genau ein Element aus B zugeord-net.



Dies ist keine eindeutige Zuordnung, denn einem Element aus A wird genau ein Element aus B zugeord-net.

Die Menge A heißt dabei **Definitionsmenge** der Funktion und Menge B heißt **Wertemenge** oder **Zielmenge** der Funktion.

Eine solche eindeutige Zuordnung nennt man auch **Funktion**.

1.1 Darstellung von Funktionen

Funktionen können (weil sie Zuordnungen sind)
a) mit Hilfe einer Wertetabelle (s. Klasse 7)
b) mit Hilfe eines Pfeildiagramms (s. oben)
c) mit Hilfe eines Graphen (s. Klasse 7)
d) mit Hilfe einer Zuordnungsvorschrift
dargestellt werden.

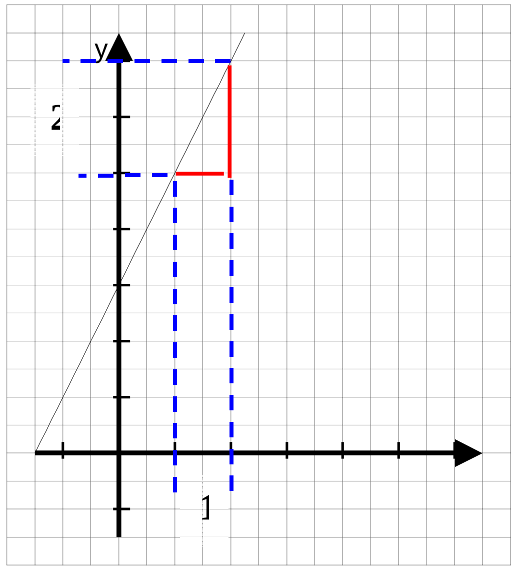
1.2 Lineare Funktionen

Eine Funktion mit der Gleichung **y = mx + b** (mit m, b $\in \mathbb{Q}$ und x $\in \mathbb{Q}$ nennt man **lineare Funktion**.
Der Graph ist eine Gerade und die Gleichung y = mx + b dieser Geraden nennt man **Gera-dengleichung**.

m nennt man **Steigung** der Geraden.
b ist der **y-Achsen Abschnitt.**

Besondere lineare Funktionen:
y = mx ($m \neq 0$) : **Ursprungsgerade**
y = b ($b \neq 0$) : Parallele zur x-Achse
y = 0 : Graph ist x-Achse
y = x : Winkelhalbierende des I. und III. Quadranten.

1.3 Steigung von Funktionsgraphen



Geht man von einem Punkt des Graphen aus parallel zur x-Achse (waagerecht) nach rechts und nach einer beliebigen Distanz parallel zur y-Achse (senkrecht) nach oben bis man wieder auf den Graphen trifft, so entsteht ein Dreieck (s. o-ben).
Das Verhältnis der Distanz in y-Richtung zur Distanz in x-Richtung nennt man **Steigung** der Geraden.
Das entstandene Dreieck nennt man deshalb **Stei-gungsdreieck.**
Um eine Steigung konkret auszurechnen, braucht man auch die genauen Längen der Dreiecksssei-ten. Diese erhält man, indem man die Koordina-ten der Schnittpunkte mit dem Graphen subtra-hiert.
Oben sind das die Punkte A(1;5) und B(2;7)

Die Dreiecksseite in y-Richtung ist also 7-5 = 2 lang Die Seite in x-Richtung ist 2-1 = 1 lang.

Steigung: $m=\frac{7-5}{2-1}=\frac{2}{1}=2$

- Je größer $|m|$ ist, desto steiler ist die Gerade.
- Für m<0 **fällt**, für m>0 **steigt** die Gerade.
- Alle Geraden mit <u>gleicher Steigung</u> sind **pa-rallel**.

Gilt für die Steigungen m_1 und m_2 zweier Gera-den g_1 und g_2: $m_1 \cdot m_2 = -1$, so gilt: $g_1 \perp g_2$.

1.4 Punkt auf einer Geraden

Ein Punkt liegt auf einer Geraden, wenn seine Koordinaten die Geradengleichung erfüllen:
z.B.: $(4|5) \in g: y = 2x - 3$,

denn **5** = 2·**4** – 3.

1.5 Geradengleichung aus 2 Punkten aufstellen:

z.B.: Gerade g durch $A(2|5)$ *und* $B(-2|4)$*:*

Steigung: $m = \frac{5-4}{2-(-2)} = \frac{1}{4}$; *also:*

$g: y = \frac{1}{4}x + t$

weil $A \in g$ *, muss gelten:*

$5 = \frac{1}{4} \cdot 2 + t$;

daraus bekommt man:

$t = 4\frac{1}{2}$;

also: $y = \frac{1}{4}x + 4\frac{1}{2}$ *geht durch A und B.*

2. Terme und Termumformungen

Die Einführung zu Termen und Termumformungen findest du auf der Seite „Klasse 7 Algebra“.

2.1 Multiplizieren von Summen

Zwei Summen werden multipliziert, indem man jeden Summanden der ersten Klammer mit allen Summanden der zweiten Klammer multipliziert und die Produkte addiert.

$$\boxed{(a+b)\,(c+d) = ac + ad + bc + bd}$$

Beispiel : $(2x+3y)(3-4x) = 6x - 8x^2 + 9y - 12xy$

2.2 Die binomischen Formeln

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a - 7)^2 = a^2 - 14a + 49$
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	$(5 + x)(5 - x) = 25 - x^2$

Weitere Beispiele:

$(c^2 + 7)^2 = c^4 + 14c^2 + 49$

$(1 - a^2x)^2 = 1 - 2a^2x + a^4x^2$

$(2f - 3g)(2f + 3g) = 4f^2 - 9g^2$

$(-3d - 2e)^2 = 9d^2 + 12de + 4e^2$

$(-d + 2e)^2 = d^2 - 4de + 4e^2$

$(-3d - 2e)(-3d + 2e) = 9d^2 - 4e^2$

2.3 Faktorisieren von Summen

Durch Ausklammern oder mit Hilfe der binomischen Formeln kann man bestimmte Summen faktorisieren (in Produkte umwandeln).

Beispiele:

$-4a + 4b$
$= -4(a - b)$

$ac + bc - ad - bd$
$= c(a + b) - d(a + b)$
$= (a + b)(c - d)$

$e^2x - ex + 3e^2y - 3ey$
$= x(e^2 - e) + 3y(e^2 - e)$
$= (e^2 - e)(x + 3y) = e(e - 1)(x + 3y)$

$3r^2 - 6rs + 3s^2 - xr^2 + 2xrs - xs^2$
$= (3 - x)(r - s)^2$

2.4 Bruchterme

Sinnvolle mathematische Ausdrücke, die aus Zahlen und Variablen bestehen, nennt man Terme. Summen, Differenzen und Produkte von Termen sind wieder Terme. **Quotienten** von Termen sind ebenfalls Terme.
Terme, bei denen die Variable im Nenner vorkommt, heißen **Bruchterme**.

Beispiele für Bruchterme: $\frac{17}{x}$; $\frac{4}{3x}$; $\frac{7y}{x+1}$

Definitionsmenge:
Bruchterme enthalten also im Nenner Variable. Da das Dividieren durch Null aber nicht erlaubt ist, darf man in einen Bruchterm die Zahlen nicht einsetzen, für die der Nenner Null wird.
Die Menge der Zahlen, die man in den Nenner einsetzen kann, ohne dass er Null wird, nennt man Definitionsmenge D eines Bruchterms.

1. Beispiel: $\frac{17}{x}$

Wenn man für x die Zahl Null einsetzt, wird der Nenner Null. Die Zahl Null darf also nicht zur Definitionsmenge gehören.
Man schreibt also $D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ Das bedeutet: Die Definitionsmenge für den Term darf alle Elemente aus $\mathbb{Q}$ enthalten außer der Null. (gesprochen: „D gleich Q ohne Null“)

2. Beispiel: $\frac{7y}{x+1}$ $D = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$

Um besser überschauen zu können, wann ein Bruchterm nicht definiert ist (d.h. wann der Nenner Null wird), ist es oft sehr sinnvoll, den Nenner, wenn möglich, in ein Produkt zu verwandeln. Dies kann man entweder durch ***Ausklammern*** oder durch ***Anwendung einer binomischen Formel*** erreichen.

Beispiel: $\frac{3x}{2x-x^2}=\frac{3x}{x(2-x)}$ (Im Nenner wurde der Faktor x aus beiden Summanden ausgeklammert.)

(Im so entstandenen zweiten Term ist viel leichter zu sehen, wann der Nenner Null wird; nämlich für x = 0 und für x = 2.) Es gilt also: **D = Q \ {0 ; 2 }**

Erweitern und Kürzen:
Beim Erweitern und Kürzen eines Bruchterms muss man alle die Einsetzungen ausschließen, für die der ursprüngliche Bruchterm nicht definiert ist, **und** alle Einsetzungen, für die der erweiterte bzw. gekürzte Bruchterm nicht definiert ist.

Beispiel: $\frac{17x}{x}=17$ D = Q \ {0}

Für den gekürzten Bruchterm ist zwar ganz Q zugelassen, da es keinen Nenner mit Variable gibt. Doch im ungekürzten Bruchterm darf die Null nicht eingesetzt werden.

Addieren und Subtrahieren:
Das Addieren und Subtrahieren von Bruchtermen erfolgt wie das Addieren und Subtrahieren von „normalen" Brüchen. Sind die Nenner zweier Bruchterme gleich, kann man sofort addieren; sind die Nenner verschieden, müssen die Bruchterme zuerst nennergleich gemacht werden.
Achtung: Sowohl für die einzelnen Summanden als auch für die entstehende Summe ist wieder auf die Defintionsmenge zu achten.

Beispiel 1 (Nenner gleich):

$$\frac{x+4}{x^2+1}+\frac{x-4}{x^2+1}=\frac{x+4+x-4}{x^2+1}=\frac{2x}{x^2+1}$$

D = Q

Beispiel 2 (nenner verschieden):

$$\frac{1}{3x}+\frac{2}{x^2}=\frac{x}{3x^2}+\frac{6}{3x^2}=\frac{x+6}{3x^2}$$

D = Q \ {0}

Multiplizieren und Dividieren:
Das **Produkt zweier Bruchterme** wird gebildet wie das Produkt zweier Brüche. (Zähler mal Zähler geteilt durch Nenner mal Nenner)

Achtung:
1. Wenn möglich, vor dem Multiplizieren zweier Bruchterme kürzen.
2. Definitionsmenge muss auch hier wieder für alle Einzelterme und für das Ergebnis der Rechnung gelten.

Beispiel:

$$\frac{x}{81}\cdot\frac{9x}{x+1}=\frac{x}{9}\cdot\frac{x}{x+1}=\frac{x^2}{9(x+1)}$$

D = Q \ {-1}

Man **dividiert zwei Bruchterme**, indem man den ersten Bruchterm mit dem Kehrwert des zweiten multipliziert.
Achtung: Hierbei sind di Definitionsmengen der beiden Nenner und des Zählers des zweiten Bruchterms zu beachten, da er ja durch das Bilden des Kehrwertes auch als Nenner „endet".

Beispiel:

$$\frac{9}{x}:\frac{81x}{x-1}=\frac{9}{x}\cdot\frac{x-1}{81x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{x-1}{9x}=\frac{x-1}{9x^2}$$

D = Q \ {0; 1}

3. Lineare Gleichungen und Ungleichungen

Eine Gleichung heißt linear, wenn die Variable in der ersten Potenz vorkommt.
Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn man **auf beiden Seiten** dieselbe Zahl oder denselben Term addiert (subtrahiert) oder auf beiden Seiten mit der selben Zahl ≠ 0 multipliziert (dividiert). Solche Umformungen sind **Äquivalenzumformungen**.

5 – 0,5x	=	*3 + 0,75x*	*|+ 0,5x*
5	=	*3 +1,25x*	*|- 3*
2	=	*1,25x*	*|: 1,25*
1,6	=	*x*	

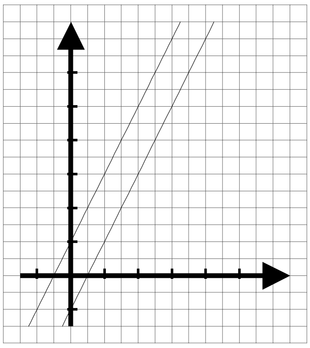
L = {1,6} falls G = Q
L= { } falls G = N

Eine lineare Gleichung hat entweder genau eine Zahl oder keine Zahl oder alle Zahlen der Grundmenge als Lösung
Da die linearen Terme auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens graphisch immer auch als

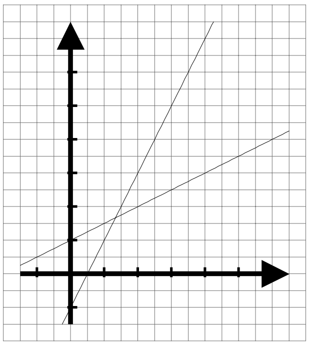
Gerade im Koordinatensystem verstanden werden können, lassen sich Lineare Gleichungen auch geometrisch verstehen und lösen.

Hat die Gleichung genau eine Lösung, so schneiden sich die entsprechenden Graphen in einem Punkt. Hat die Gleichung alle Zahlen der Grundmenge als Lösung, dann sind die beiden Geraden identisch (sie liegen aufeinander). Hat die Gleichung keine Lösung, so verlaufen die entsprechenden Geraden parallel (s.u.).

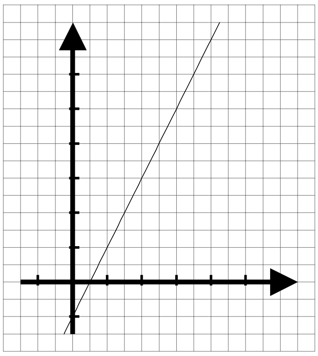
Beispiele 1: f(x) = 2x + 1 g(x) = 2x - 1



Beispiel 2: $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ $g(x) = 2x - 1$



Beispiel 3: f(x) = 2x-1 g(x) = 2(x-3) +5



Achtung: Bei Ungleichungen wird das Ungleichheitszeichen umgekehrt, wenn auf beiden Seiten mit einer negativen Zahl multipliziert (dividiert) oder der Kehrwert gebildet wird.

$-5x > 2$ $\quad 5 > 3$ $\quad x < -\frac{2}{5}$ $\quad \frac{1}{5} < \frac{1}{3}$

4. Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem entsteht dann, wenn man aus den Informationen zu einem bestimmten Problem zwei oder mehrere Gleichungen mit zwei oder mehreren Variablen bilden kann, die sich nur lösen lassen, indem man die Gleichungen miteinander kombiniert.
Es könnte beispielsweise folgendes Gleichungssystem entstehen:

I. $2x + 4y = 8$
II. $x - 4y = -2$

Man kann ein solches Gleichungssystem grundsätzlich auf vier verschiedene Weisen lösen.

a) Graphische Lösung:

Geraden einzeichnen; der Schnittpunkt ist die Lösung.

b) Einsetzungsverfahren

aus II folgt:	$x = -2 + 4y$;
in I.einsetzen	$2 \cdot (-2 + 4y) + 4y = 8$;
ausrechnen:	$y = 1$;
in I. (oder II.)	$x = 2$;
also:	$L = \{(2 \mid 1)\}$

c) Gleichsetzungsverfahren

Beide Gleichungen nach derselben Variable umstellen und dann die beiden anderen Seiten gleichsetzen.

Aus I folgt: $4y = 8 - 2x \Rightarrow y = 2 - \frac{1}{2}x$

Aus II folgt: $-4y = -x - 2 \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

Gleichsetzen: $2 - \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{3}{4}x \Rightarrow x = 2$ usw.

In eine der Ausgangsgleichungen einsetzen: L = {(2 | 1)}

d) Additionsverfahren

I.+II. : $3x = 6$;
$x = 2$;

in I. eingesetzt:	$y = 1$;
also:	$L = \{(2 \mid 1)\}$

Es gehört ein wenig Übung dazu zu erkennen welches Lösungsverfahren bei welchem Gleichungssystem das Beste ist.