Klasse 9 Algebra

1. Die Quadratwurzel

Die Quadratwurzel $\sqrt{a}$ ist die positive Lösung der Gleichung $x^2 = a$. $a \geq 0$!

$\sqrt{0} = 0$!

a heißt **Radikand**

Ein Teil der Quadratwurzeln sind **rationale** Zahlen (z.Bsp. $\sqrt{9}, \sqrt{0{,}04}$ oder $\sqrt{\frac{4}{9}}$), andere dagegen **irrationale** Zahlen (z. Bsp. $\sqrt{2}, \sqrt{0{,}4}$ oder $\sqrt{\frac{5}{9}}$).

Die Menge $\mathbb{R}$ der **reellen** Zahlen umfasst alle rationalen und irrationalen Zahlen.

1.1 Rechnen mit Quadratwurzeln

- $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \,;\, a \geq 0$
- $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, \text{ falls } a \geq 0 \\ -a, \text{ falls } a < 0 \end{cases}$; a beliebig
- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \,;\, a, b \geq 0$
- $\sqrt{a : b} = \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{a} : \sqrt{b} \,;\, \begin{matrix} a \geq 0 \\ b > 0 \end{matrix}$
- <u>**aber:**</u> $\sqrt{a \pm b} \neq \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ **!!**

1.2 Teilweises Radizieren

Zerlege den Radikand in ein Produkt, so dass ein Faktor eine Quadratzahl ist. Beispiele:

- $\sqrt{192} = \sqrt{64 \cdot 3} = 8\sqrt{3}$;
- $\sqrt{x^5} = \sqrt{x^4 \cdot x} = x^2\sqrt{x} \,;\, x \geq 0$

1.3 Unter die Wurzel ziehen

Ist bei einem Produkt ein Faktor eine Wurzel, so lässt sich das Produkt als Wurzel schreiben. Beispiele:

- $4\sqrt{5} = \sqrt{4^2 \cdot 5} = \sqrt{80}$;
- $b\sqrt{b^4 + 9} = \sqrt{b^2(b^4 + 9)}$;
- $-3\sqrt{a+1} = -\sqrt{3^2(a+1)}$

2. Lösen von Wurzelgleichungen

Eine Gleichung, in der Wurzelterme vorkommen, nennt man auch **Wurzelgleichung**.

Beispiel:

$$\sqrt{x^2 - 16} = -x + 2$$

Naheliegende Idee: Durch Quadrieren beider Seiten der Gleichung die Wurzel beseitigen und dann durch Umstellen nach x die Gleichung lösen.

Aber **Achtung!!** Durch das Quadrieren können zusätzliche scheinbare Lösungen entstehen, die aber keine Lösungen der Gleichung sind.

Beispiel:

$$\sqrt{x^2 - 16} = -x + 2$$

$$x^2 - 16 = x^2 - 4x + 4$$

$$x = 5$$

Setzt man nun x = 5 in die Ausgangsgleichung ein, so stellt man fest, dass 5 keine Lösung der Gleichung ist.

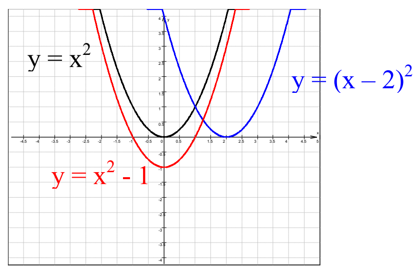
Die Lösungsmenge lautet also L = { }

Fazit: Man darf Wurzelgleichungen zwar bei Bedarf quadrieren, um sie nach x umstellen zu können, muss aber dann durch eine Probe (Einsetzen von x in Ausgangsgleichung) nachprüfen, welche der evtl. mehreren Ergebnis auch Lösungen der Gleichung sind.

3. Quadratische Funktionen

Der Graph der Funktion $x \mapsto y$ mit $y = ax^2 + bx + c; a \neq 0$ und $x \in \mathbb{R}$ wird **Parabel** genannt. Die Gleichung der **Normalparabel** lautet $y = x^2$.

Verschiebung der Normalparabel



3.1 Scheitelpunktsform

Die Gleichung $y = a \cdot (x - s_1)^2 + s_2$; $a \neq 0$ nennt man die **Scheitelgleichung** einer Parabel.

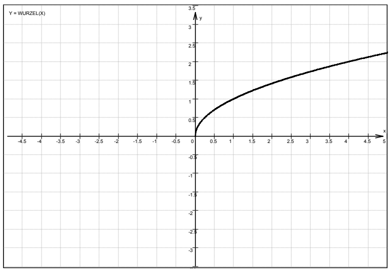
- **Scheitel** $S(s_1 \mid s_2)$
- **Wertemenge**
  $a > 0 \Rightarrow W = [s_2; \infty[$, Parabel nach oben geöffnet
  $a < 0 \Rightarrow W =]-\infty; s_2]$; Parabel nach unten geöffnet
- **Parabelform**

Für 0 < |a| < 1 ist die Parabel breiter (gestaucht), für |a| < 1 ist sie schlanker als die Normalparabel (gestreckt).

3.2 Wurzelfunktion

Die Funktion $x \alpha \; y = x^2; x \geq 0$ ist umkehrbar. Die Umkehrfunktion $x \alpha \; y = \sqrt{x}; x \geq 0$ heißt **Wurzelfunktion**.

Der Graph der Wurzelfunktion hat die Form einer „halben“ Parabel.



Natürlich ist auch $y = \sqrt{x+4}$ eine Wurzelfunktion. Für x dürfen bei Wurzelfunktionen natürlich immer nur Werte eingesetzt werden, bei denen der Term unter der Wurzel nicht negativ wird.

4. Quadratische Gleichungen

Eine Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0; a \neq 0$ nennt man **quadratische Gleichung** in x.

4.1 Sonderfälle:

- $b = 0 \Leftrightarrow$ reinquadratische Gleichung

  In diesem Fall lässt sich die quadratische Gleichung in die Form $x^2 = d$ bringen. Dabei gilt:

  $L = \{\pm\sqrt{d}\}$ für $d \geq 0$, $\quad L = \{\}$ für $d < 0$.

  Bsp.: $x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$

- $c = 0$

  Durch Ausklammern lässt sich die quadratische Gleichung in die Form $x \cdot (ax + b) = 0$ bringen.

  $L = \left\{0; -\frac{b}{a}\right\}$

  Bsp.: $3x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow x(3x - 7 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0; x_2 = 2\frac{1}{3}$

- $a = 1 \Leftrightarrow$ Normalform der quadratischen Gleichung

  Es ergibt sich als Lösungsformel die sogenannte **pq-Formel**

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

4.2 Allgemeiner Fall

- **Lösung mit Hilfe der Lösungsformel (siehe pq-Formel)**

  Für die Lösungen der quadratischen Gleichung gilt:

  $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

  Der Ausdruck $b^2 - 4ac$ wird als **Diskriminante D** bezeichnet.

  - ➢ D > 0 <u>genau zwei</u> Lösungen
  - ➢ D = 0 <u>genau eine</u> Lösung
  - ➢ D < 0 keine Lösung

Hinweis zur Lösung der allgemeinen Form

Bringt man durch geeignete Termumformung eine quadratische Gleichung in allgemeiner Form zunächst auf Normalform (Division der allgemeinen quadr. Gleichung durch a), so kann anschließend zur Berechnung der Lösungen wieder die **pq-Formel** (s.o.) benutzt werden.

4.3 Biquadratische Gleichung

Eine Gleichung der Form $ax^4 + bx^2 + c = 0; a \neq 0$ nennt man **biquadratische** Gleichung.

Durch die **Substitution** $u = x^2$ wird die biquadratische Gleichung in eine quadratische Gleichung in u umgewandelt. Diese Gleichung ist zu lösen. Abschließend muss wieder rücksubstituiert werden.

4.4 Der Satz von Vieta

Sind x_1 und x_2 die Lösungen einer quadratischen Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$, dann gilt:

$$\boxed{x_1 + x_2 = -p \quad \text{und} \quad x_1 \cdot x_2 = q}$$

Folgerung: Hat eine quadratische Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ die Lösungen x_1 und x_2, so lässt sich der Term $x^2 + px + q$ als Produkt $(x - x_1) \cdot (x - x_2)$ schreiben.

4.5 Faktorisieren eines quadr. Terms

Hat die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ die Lösungen x_1 und x_2, so gilt : $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$.